

CALCUL NUMERIQUE DES ARCS

Procédure de construction d'abaques (2ème et dernière partie)

Par

M.A. MOHAMED-CHERIFIngénieur Ecole Polytechnique de Montréal - Magister Génie Civil
Enseignant à l'E.N.T.P. (Alger)

Résumé

L'article traite de la résolution numérique des arcs et propose une procédure de construction d'abaques pour la résolution des problèmes de construction en arc (poutre en arc, cintres de tunnel...).

Après avoir développé, dans une première partie les solutions analytiques ainsi que la formulation des différentes matrices de rigidité (voir Algérie EQUIPEMENT N° 3 de Janvier 92) ; cette seconde partie traite du calcul numérique. Les résultats conduisent à retrouver des formes compactes qui permettent de passer d'une solution en efforts et en déplacements, tenant compte dans l'énergie de déformation de la flexion seulement (Bernoulli) à des solutions plus riches qui tiennent compte de l'effet de l'effort normal (Kirchoff) ou de l'effet de l'effort tranchant (Timoshenko).

Mots clés : arcs - calcul numérique - abaques

1 INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, on a vu le développement de la solution analytique des problèmes posés, ainsi que la formulation des différentes matrices de rigidité d'un élément d'arc avec prise en compte dans l'énergie de déformation de l'effet de la flexion seulement (solution de Bernoulli), avec prise en compte de l'effet de la flexion et de l'effort normal et enfin avec prise en compte des trois efforts internes : flexion, effort normal et effort tranchant (solution de Timoshenko).

Le programme STAP a été adapté et étendu pour y inclure les matrices de rigidité sus-mentionnées. Si, pour les deux premières, l'inversion des matrices de souplesse correspondantes conduit à des matrices de rigidité explici-

tes (voir chapitre ci-dessus), par contre, pour la troisième, l'inversion est effectuée numériquement par l'intermédiaire d'une sous-routine d'inversion en FORTRAN introduite dans STAP.

Ce travail de programmation est résumé par les programmes suivants :

- STAPCER 1 : prise en compte de la flexion seulement (Bernoulli).
- STAPCER 3 : prise en compte de M, N et T (Timoshenko).

L'exemple montré sur la figure 1 a été traité en détail pour :

- 1°) - Vérifier la formulation et surtout la programmation effectuée pour introduire les matrices de rigidité d'un élément d'arc dans le programme STAP.
- 2°) - Etablir les éventuelles relations liant l'élançement de l'arc pouvant être caractérisé par le rapport (h/R) et les déplacements ou les efforts en fonction des hypothèses retenues (Bernoulli, Kirchoff ou Timoshenko).
- 3°) - Etudier l'influence de l'effort normal et/ou de l'effort tranchant en fonction de l'élançement et du degré de surbaissement de l'arc (rapport f/L).

2 CONDITION D'INEXTENSIBILITE ET DE KIRCHOFF

Il a été vu lors de la formulation des matrices de rigidité, que pour obtenir la solution de Bernoulli à partir de la solution développée avec prise en compte du moment de flexion et de l'effort normal, il suffisait de faire tendre le nombre adimensionnel Z vers 0.

Pour une section rectangulaire par exemple :

$$Z = (h/R)^2/12$$

pour $(h/R) \Rightarrow 0$, ou pour $h \Rightarrow 0$ (R constant) ; $Z \Rightarrow 0$.

Cette condition est désignée dans la littérature par *condition d'inextensibilité* : qui implique que l'on doit retrouver la solution de Bernoulli dans le cas des élancements très grands ou dans le cas de petite hauteur.

Par analogie à la solution des plaques chargées transversalement que l'on désigne par solution de Kirchhoff (sans prise en compte de l'effet du cisaillement transversal), on désignera pour les arcs par hypothèse de Kirchhoff, celle qui retient dans l'énergie de déformation les effets de M et N, généralement désignée par condition de Kirchhoff dans la littérature [15] [16].

De même, l'examen de la matrice de souplesse établie à partir de l'hypothèse de Timoshenko (prise en compte de l'effet de M, N et T) montre que l'on peut aboutir à la matrice de souplesse établie à partir de l'hypothèse de Bernoulli (prise en compte de l'effet de M seulement) en faisant tendre $Z \rightarrow 0$.

Eu égard à la programmation effectuée, la condition d'inextensibilité était obtenue en donnant une très grande valeur à la section (10^{12} par exemple).

Le bien fondé de cette procédure a été vérifié par l'intermédiaire de la comparaison des résultats contenus dans le tableau 1.

Tableau 1 : Résultats STAPCER1 et STAPCER3

Type de programmation	Programmation de la solution analytique	STAPCER 1	STAPCER 3
Déplacement à la clef	0,01166180	0,01166180	0,01166180
Effort normal à la clef	0,4591385	0,4591385	0,4591385
Moment à la clef	0,1514680	0,1514680	0,1514680
Moment à l'encastrement	0,1106065	0,1106065	0,1106065

Ainsi la solution de Bernoulli a été obtenue par une programmation classique d'un calcul numérique de la solution analytique telle que développée auparavant.

Elle a aussi été obtenue par l'intermédiaire de la matrice de rigidité propre à la solution de Bernoulli (STAPCER 1) et enfin par l'intermédiaire de la matrice de rigidité du cas général (prise en compte de M, N et T : programme STAPCER 3) en égalisant la section de la poutre à 10^{12} .

Les résultats pour l'exemple de la figure 1 de l'arc circulaire bi-encasté, de rayon égal à 10, sous-tendant un angle de 180° avec $E=1$, $I=1$ et $P=1$ sont donnés dans le tableau ci-dessus.

L'analyse des résultats ci-dessus permet de vérifier que la programmation a été a priori bien effectuée. Une vérification directe est montrée par les résultats de la programmation directe de la solution analytique de type Bernoulli, et ceux obtenus par le programme STAPCER 1 dont la matrice de rigidité introduite correspond à celle du même type.

Une vérification indirecte est obtenue avec la comparaison de la même solution analytique et en utilisant le programme STAPCER 3 (matrice de rigidité correspondant au cas général avec prise en compte de M, N et T) en égalisant la section de la poutre à 10^{12} .

3 SOLUTION NUMERIQUE POUR UNE CHARGE A LA CLEF

Une série de calculs a été effectuée sur un arc circulaire sous-tendant un angle de 180° avec une variation du rapport (R/h) allant de 1 à 10^8 ; h désignant la hauteur de la section de la poutre.

Pour décrire complètement et convenablement la variation des déplacements ou des éléments de réduction dans la structure, le demi-arc a été modélisé par 30 éléments (chaque élément sous-tendant un angle de 3°).

Dans le cas d'un arc avec une charge à la clef, le déplacement normalisé est exprimé par :

$$\Delta^T = EIw^T/(PR^3) \quad \text{pour la solution de Timoshenko}$$

$$\Delta^M = EIw^M/(PR^3) \quad \text{pour la solution de Bernoulli}$$

$$\Delta^N = EIw^N/(PR^3) \quad \text{pour la solution avec prise en compte de M et N}$$

Le graphe de la figure 1 représente l'écart en pourcentage entre le déplacement normalisé de la solution de Timoshenko et celui de la solution de Bernoulli.

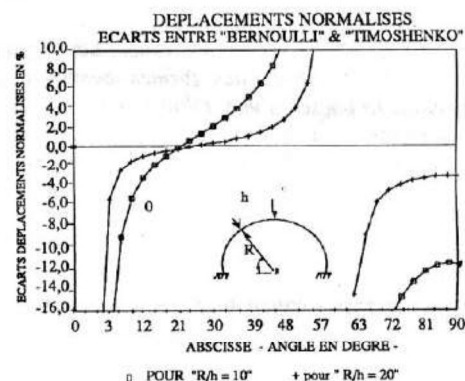


Figure 1 : Ecart entre la solution de Timoshenko et celle de Bernoulli

Le graphe de la figure 2 représente l'écart en pourcentage entre le déplacement normalisé de la solution avec prise en compte de M et N et celui de la solution de Bernoulli pour différents points de calcul (3° , 27° , 39° , 57° et 90°).

Comme on pouvait s'y attendre sur examen de la solution analytique, le déplacement normalisé de la solution de Bernoulli est indépendant du rapport (R/h) . Ce déplacement normalisé de référence est donné par le tableau 2.

Les calculs effectués pour le rapport R/h variant de 5 à 10^8 dans le cadre des trois hypothèses considérées montrent que pratiquement pour $R/h > 10^3$ le déplacement normalisé est le même (6 chiffres significatifs), quel que soit l'hypothèse retenue.

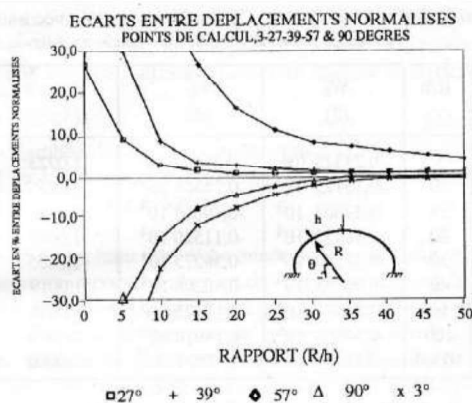


Figure 2 : Ecart entre la solution avec prise en compte de M et N et la solution de Bernoulli.

Tableau 2 : Déplacements normalisés (solution de Bernoulli avec $I = 8,33 \cdot 10^{-2}$)

θ	$x = s/l$	w : déplacement radial pour $R/h = 10$	EIw/PR^3	w : déplacement radial pour $R/h = 15$
0°	0,0	0,0	0,0	0,0
9°	0,1	$0,129427 \cdot 10^2$	$0,129427 \cdot 10^{-1}$	$0,436816 \cdot 10^2$
18°	0,2	$0,391885 \cdot 10^2$	$0,391885 \cdot 10^{-1}$	$0,132261 \cdot 10^2$
27°	0,3	$0,628345 \cdot 10^2$	$0,628345 \cdot 10^{-1}$	$0,212066 \cdot 10^2$
36°	0,4	$0,725242 \cdot 10^2$	$0,725242 \cdot 10^{-1}$	$0,244769 \cdot 10^2$
45°	0,5	$0,619933 \cdot 10^2$	$0,619933 \cdot 10^{-1}$	$0,209227 \cdot 10^2$
54°	0,6	$0,303717 \cdot 10^2$	$0,303717 \cdot 10^{-1}$	$0,102504 \cdot 10^2$
63°	0,7	$-0,177670 \cdot 10^2$	$-0,177670 \cdot 10^{-1}$	$-0,599636 \cdot 10^2$
72°	0,8	$-0,726170 \cdot 10^2$	$-0,726170 \cdot 10^{-1}$	$-0,245064 \cdot 10^2$
81°	0,9	$-0,119567 \cdot 10^2$	$-1,195670 \cdot 10^{-1}$	$-0,403539 \cdot 10^2$
90°	1,0	$-0,139942 \cdot 10^3$	$-1,399420 \cdot 10^{-1}$	$-0,472303 \cdot 10^2$

Avec l'augmentation du rapport R/h , toutes les solutions convergent vers celles de Bernoulli.

Le volume des calculs effectués étant important, il est nécessaire d'adopter une notation particulière pour rendre compte des résultats.

Le déplacement radial (w) peut être donné pour une section de l'arc définie par la position du point de calcul et pour les trois types d'hypothèses envisagées (Bernoulli, Timoshenko, ...).

D'une manière générale, on notera :

$$w_j^i = M, N, T \quad \text{et} \quad j = 0, 3, 6, \dots, 90 \text{ degrés}$$

L'indice supérieur (i) indiquera le type d'hypothèse retenue :

$i = M$ pour une solution avec prise en compte de l'effet du moment de flexion seulement (Bernoulli).

$i = N$ pour une solution avec prise en compte de l'effet de flexion et de l'effort normal.

$i = T$ pour une solution avec prise en compte de l'effet de flexion, de l'effort normal et de l'effort tranchant (Timoshenko).

L'indice inférieur (j) désignera la position du point du calcul du déplacement (w) :

$$\begin{aligned} j = 0 \text{ ou } j = e & \text{ pour un point situé à l'encastrement} \\ j = 30, 45 & \text{ pour un point situé à } 30^\circ \text{ ou } 45^\circ \\ j = c & \text{ pour un point situé à la clef de l'arc.} \end{aligned}$$

Ainsi par exemple : w_c^M

représentera le déplacement radial à la clef de l'arc quand on prend en compte le moment de flexion seulement dans l'expression de l'énergie de déformation.

La même notation est utilisée pour le déplacement normalisé :

$$\Delta_j^i = EIw_j^i / (PR^3)$$

Pour les efforts on utilisera la notation déjà mentionnée auparavant :

$$N_j^i = \gamma_j^i P \quad \text{et} \quad M_j^i = \beta_j^i PR$$

Le tableau 3 donne les valeurs des déplacements normalisés à la clef de l'arc successivement dans l'hypothèse de Bernoulli et l'hypothèse avec prise en compte dans l'énergie de déformation de M et N, et pour un rapport R/h variant de 5 à 10^4 .

On remarquera que l'on peut exprimer le rapport R/h par l'élancement de l'arc.

Si on désigne par (r), le rayon de giration de la section courante et par (L) la longueur de l'arc on a alors :

$$L/r = L/\sqrt{I/\Omega} = k(R/h)$$

Dans le cas d'une section rectangulaire :

$$L/r = 2\sqrt{12} \alpha(R/h)$$

Comme on peut le remarquer sur examen des résultats du tableau 3, la solution de Bernoulli est indépendante du rapport R/h .

Tableau 3 : Déplacements normalisés (angle sous-tendu 180°)

R/h	L/r	Δ_c^M	Δ_c^N	Rapport
(1)	(2)	(3)	(4)	(3)/(4)
5	15,7	-0,13994	-0,18660	0,7499
10	31,5	-0,13994	-0,15173	0,9223
15	47,1	-0,13994	-0,14519	0,9639
20	62,8	-0,13994	-0,14290	0,9793
30	93,3	-0,13994	-0,14126	0,9907
40	125,7	-0,13994	-0,14068	0,9947
50	157,1	-0,13994	-0,14041	0,9966
100	314,2	-0,13994	-0,14006	0,9992
500	--	-0,13994	-0,13995	1,0000
1000	--	-0,13994	-0,13994	1,0000
10000	--	-0,13994	-0,13994	1,0000

On peut également remarquer que l'on peut retrouver une relation intéressante entre les déplacements normalisés calculés sous hypothèse de Bernoulli et sous hypothèse de Kirchhoff (prise en compte de l'effet de M et N dans l'énergie de déformation).

Cette relation est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta_c^N = \Delta_c^M [1 + 8,44 (h/R)^2] \text{ pour } R/h > 15$$

De la même manière, on peut retrouver la relation liant les déplacements normalisés sous hypothèse de Timoshenko et sous hypothèse de Bernoulli.

Cependant dans le cas des déplacements normalisés sous hypothèse de Timoshenko, le module (G) de cisaillement intervient dans les calculs.

La figure 3 et le tableau 4 résument les calculs effectués pour ces dits déplacements.

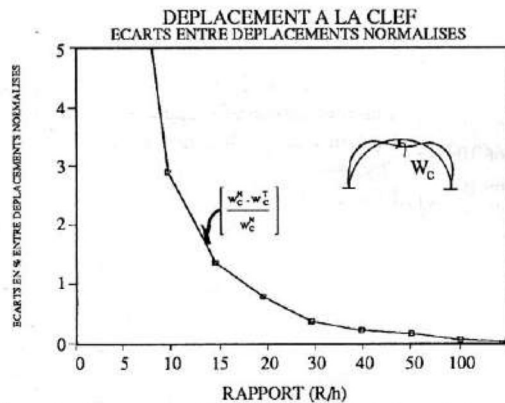


Figure 3 : Ecarts entre déplacements normalisés : solution de Timoshenko et solution avec prise en compte de M et N

Tableau 4 : Déplacements normalisés (angle sous-tendu 180°) - Solution de TIMOSHENKO

R/h (1)	$\Delta_c^T (\nu=0,0)$ (2)	$\Delta_c^T (\nu=0,25)$ (3)	$\Delta_c^M / (2)$ (4)	$\Delta_c^M / (3)$ (5)
5	-0,20383	-0,20812	0,6866	0,6724
10	-0,15611	-0,15721	0,8964	0,8902
15	-0,14715	-0,14764	0,9510	0,9479
20	-0,14400	-0,14427	0,9718	0,9700
30	-0,14175	-0,14427	0,9873	0,9864
40	-0,14095	-0,14103	0,9928	0,9923
50	-0,14059	-0,14064	0,9954	0,9951
100	-0,14010	-0,14011	0,9989	0,9988
10000	-0,13994	-0,13994	1,0000	1,0000

On obtient les relations suivantes :

$$\Delta_c^T = \Delta_c^M [1 + 11,60 (h/R)^2] \quad (\nu = 0,0) \text{ pour } R/h > 15$$

$$\Delta_c^T = \Delta_c^M [1 + 12,35 (h/R)^2] \quad (\nu = 0,25) \text{ pour } R/h > 15$$

Les résultats pour les déplacements normalisés sous hypothèse de Kirchhoff et sous hypothèse de Timoshenko et leur comparaison sont donnés par le tableau 5.

Tableau 5 : Déplacements d'un arc bi-encasté avec une charge ponctuelle à la clef (angle sous-tendu 180°)

R/h (1)	W_c^N (2)	W_c^T (3)	Rapport (3)/(2)
5	-0,23325 10^2	-0,25479 10^2	1,0923
10	-0,15173 10^3	-0,15611 10^3	1,0289
15	-0,49002 10^3	-0,49663 10^3	1,0135
20	-0,11432 10^4	-0,11520 10^4	1,0077
30	-0,38140 10^4	-0,38273 10^4	1,0035
40	-0,90035 10^4	-0,90208 10^4	1,0019
50	-0,17551 10^5	-0,17575 10^5	1,0013
100	-0,14006 10^6	-0,14010 10^6	1,0003
10000	-0,13994 10^{12}	-0,13994 10^{12}	1,0000

De la même manière, la figure 4 et le tableau 6 présentent les résultats du déplacement radial à 45° pour différentes hypothèses.

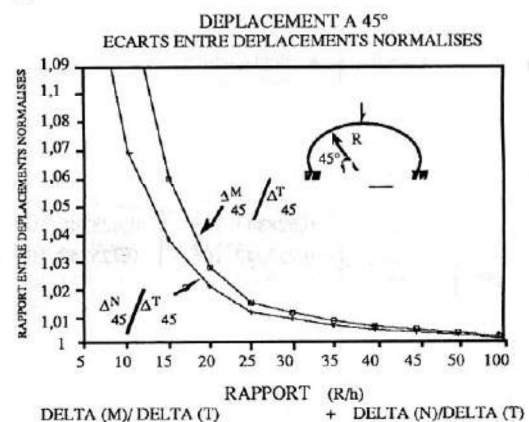


Figure 4 : Ecarts entre déplacements normalisés : solution de Timoshenko et solution de Bernoulli

Tableau 6 : Déplacements normalisés à 45° pour arc bi-encasté (angle sous-tendu : 180°)

R/h (1)	Δ_{45}^N (2)	Δ_{45}^T (3)	$\Delta_{45}^M / (2)$ (4)	$\Delta_{45}^M / (3)$ (5)
5	3,72462 10^{-2}	4,18711 10^{-2}	1,66442	1,48057
10	5,57403 10^{-2}	5,68898 10^{-2}	1,11218	1,08971
15	5,59086 10^{-2}	5,97188 10^{-2}	1,0883	1,03809
20	6,04259 10^{-2}	6,04259 10^{-2}	1,02594	1,02109
30	6,12963 10^{-2}	6,14237 10^{-2}	1,01137	1,00927
40	6,16013 10^{-2}	6,16734 10^{-2}	1,00636	1,00519
50	6,17423 10^{-2}	6,17882 10^{-2}	1,00407	1,00332
100	6,19307 10^{-2}	6,19422 10^{-2}	1,00101	1,00083
10000	6,19933 10^{-2}	6,19933 10^{-2}	1,00000	1,00000

4 GENERALISATION POUR LA SOLUTION EN DEPLACEMENT

Les résultats donnés auparavant montrent bien les relations qui peuvent exister entre les déplacements calculés avec prise en compte dans l'énergie de déformation successivement de l'effet de M seulement (hypothèse de Bernoulli), de l'effet de M et N (hypothèse - désignée par extension- de Kirchhoff) et enfin l'effet de M, N et T (hypothèse de Timoshenko).

L'étude systématique a été menée pour lier les diffé-

rents déplacements selon les différentes hypothèses retenues.

Une notation particulière, définie par les relations ci-après, a été introduite :

$$\Delta^N = \Delta^M [1 + \psi(N, M)(h/R)^2]$$

$$\Delta^T = \Delta^M [1 + \psi(T, M)(h/R)^2]$$

$$\Delta^T = \Delta^N [1 + \psi(T, N)(h/R)^2]$$

Plus généralement,

$$\Delta^i = \Delta^j [1 + \psi(i, j)(h/R)^2]$$

$$i = M, N, T \quad \text{et} \quad j = M, N, T$$

La détermination des facteurs $\psi(i, j)$ permet d'établir toutes les relations susceptibles de lier les différents déplacements normalisés.

Ils permettent notamment de corriger les résultats obtenus sous une hypothèse donnée (par exemple celle de Bernoulli) pour obtenir ceux relatifs à une hypothèse plus riche (Timoshenko).

Il existe évidemment une relation entre $\psi(i, j)$ et $\psi(j, i)$.

En effet :

$$\Delta^i = \Delta^j [1 + \psi(i, j)(h/R)^2]$$

et

$$\Delta^j = \Delta^i [1 + \psi(j, i)(h/R)^2]$$

Conduisant à :

$$\begin{aligned} \psi(i, j)(h/R)^2 + \psi(j, i)(h/R)^2 + \\ + \psi(i, j) + \psi(j, i)(h/R)^4 = 0 \end{aligned}$$

Pour R/h : suffisamment grand :

$(h/R)^4 \psi(i, j) \psi(j, i)$ est négligeable.

On aura alors : $\psi(i, j) = -\psi(j, i)$

Cette dernière relation sera vérifiée par les calculs numériques résumés dans les tableaux 7 à 10.

On remarquera que les tableaux en question donnent les facteurs de correction arrondis à 0,05.

Avec les valeurs ainsi obtenues, les déplacements normalisés sont calculés exactement avec quatre (4) chiffres significatifs par les formules précédentes.

L'examen des différents facteurs de correction $\psi(i, j)$ (i et $j = M, N, T$) montre que les facteurs de correction

Tableau 7 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à la clef

R/h	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$	$\psi(T, M)$	$\psi(M, T)$	$\psi(T, N)$	$\psi(N, T)$
10	+8,40	-7,80	+11,60	-10,50	+2,90	-2,80
15	+8,45	-8,15	+11,60	-11,00	+3,00	-3,00
20	+8,45	-8,30	+11,60	-11,50	+3,10	-3,10
30	+8,45	-8,40	+11,60	-11,50	+3,10	-3,15
40	+8,45	-8,40	+11,60	-11,55	+3,15	-3,15
50	+8,45	-8,40	+11,60	-11,60	+3,15	-3,15
100	+8,45	-8,40	+11,60	-11,60	+3,15	-3,15
10000	+8,45	-8,45	+11,60	-11,60	+3,15	-3,15

Tableau 8 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à 45°

R/h	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$	$\psi(T, M)$	$\psi(M, T)$	$\psi(T, N)$	$\psi(N, T)$
10	-10,10	+11,20	-8,25	+9,00	+2,05	-2,00
15	-10,10	+10,60	-8,25	+8,60	+1,95	-1,90
20	-10,10	+10,40	-8,25	+8,45	+1,90	-1,90
30	-10,10	+10,20	-8,25	+8,35	+1,90	-1,90
40	-10,10	+10,20	-8,25	+8,30	+1,90	-1,90
50	-10,10	+10,20	-8,25	+8,30	+1,90	-1,90
100	-10,10	+10,10	-8,25	+8,25	+1,90	-1,90
10000	-10,10	+10,10	-8,25	+8,25	+1,90	-1,90

Tableau 9 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à 30°

R/h	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$	$\psi(T, M)$	$\psi(M, T)$	$\psi(T, N)$	$\psi(N, T)$
10	-4,85	+5,10	-2,20	+2,25	+2,75	-2,70
15	-4,85	+4,95	-2,25	+2,25	+2,70	-2,65
20	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65
30	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65
40	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65
50	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65
100	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65
10000	-4,85	+4,90	-2,25	+2,25	+2,65	-2,65

Tableau 10 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à 75°

R/h	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$	$\psi(T, M)$	$\psi(M, T)$	$\psi(T, N)$	$\psi(N, T)$
10	+12,95	-10,95	+14,74	-12,85	+2,20	-2,15
15	+12,30	-11,70	+14,80	-13,85	+2,35	-2,30
20	+12,30	-11,95	+14,80	-14,30	+2,40	-2,40
30	+12,30	-12,15	+14,80	-14,65	+2,45	-2,45
40	+12,30	-12,25	+14,80	-14,75	+2,45	-2,45
50	+12,30	-12,30	+14,80	-14,80	+2,45	-2,45
100	+12,30	-12,30	+14,80	-14,80	+2,45	-2,45
10000	+12,30	-12,30	+14,80	-14,80	+2,45	-2,45

$\psi(N, M)$ et $\psi(T, M)$ se stabilisent plus rapidement lorsque le rapport R/h augmente.

C'est pour cela qu'ils ont été choisis pour une détermination systématique dans les relations :

$$\Delta^N = \Delta^M [1 + \psi(N, M)(h/R)^2]$$

$$\Delta^T = \Delta^M [1 + \psi(T, M)(h/R)^2]$$

Ils sont donnés en fonction de la position du point de calcul par le tableau 11 et la figure 5.

Tableau 11 : Facteurs de correction

θ	$x = s/l$	$\psi(N,M)$	$\psi(T,M)$
0°	0,00	--	--
9°	0,10	-2,80	+4,95
18°	0,20	-3,40	+0,70
27°	0,30	-4,40	-1,55
36°	0,40	-6,15	-3,90
45°	0,50	-10,10	-8,25
54°	0,60	-26,40	-25,20
63°	0,70	+53,90	+57,50
72°	0,80	+14,85	+17,35
81°	0,90°	+9,65	+12,25
90°	1,00	+8,45	+11,60

Nota : les facteurs de correction donnés dans ce tableau représentent les facteurs qui se sont stabilisés pratiquement pour $R/h > 15$

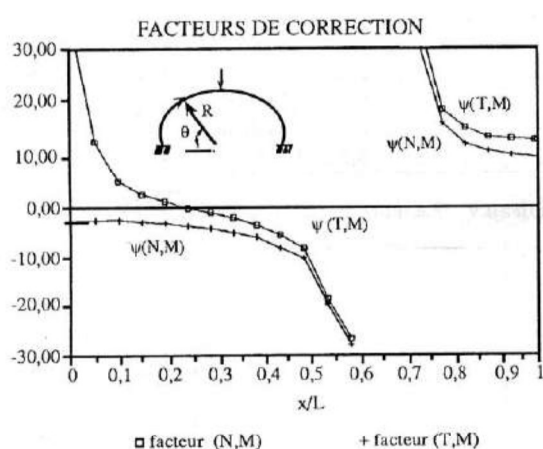


Figure 5 : Facteurs correctifs $\psi(N,M)$ $\psi(T,M)$ $2\alpha = 180^\circ$

5 SOLUTION EN EFFORT

Les calculs ont été également menés pour la détermination des relations pouvant lier les efforts obtenus pour les trois hypothèses envisagées.

La même conclusion que dans le cas des déplacements demeure valable. Pour la solution de Bernoulli, les efforts normalisés sont indépendants du rapport R/h .

Ils sont donnés par le tableau 12 et le graphe correspondant de la figure 6.

Tableau 12 : Efforts normalisés sous hypothèse de BERNOULLI

$\xi = s/L$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
γ^M	0,50000	0,56566	0,61734	0,65377	0,67405	0,67773
$\xi = s/L$	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	
γ^M	0,66475	0,63548	0,59067	0,53141	0,45914	

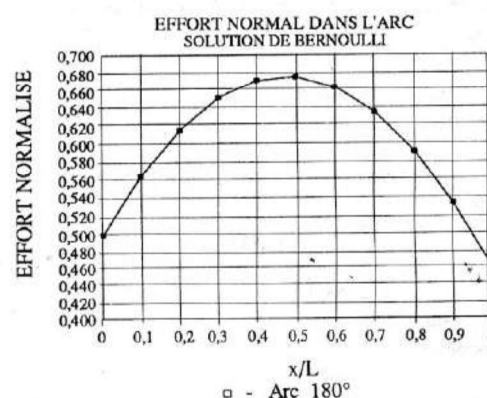


Figure 6 : Variation de l'effort normal (normalisé)

On rapporte dans le tableau 13 les déplacements normalisés calculés à la clef d'un arc bi-encasté avec une charge ponctuelle à la clef pour un rapport (R/h) variant de 10 à 10^4 .

Les résultats ci-dessus permettent d'établir les relations suivantes :

$$\gamma_c^N = \gamma_c^M [1 - 0,74 (h/R)^2]$$

$$\gamma_c^T = \gamma_c^M [1 - 0,97 (h/R)^2]$$

$$\beta_c^N = \beta_c^M [1 + 0,82 (h/R)^2]$$

$$\beta_c^T = \beta_c^M [1 + 1,07 (h/R)^2]$$

qui permettent de passer des résultats obtenus avec l'une des hypothèses à ceux relatifs à une autre.

Tableau 13 : Efforts normalisés à la clef d'un arc bi-encasté (charge ponctuelle)

R/h	L/r	γ_c^N	γ_c^T	β_c^N	β_c^T
10	108,8	-0,45573	-0,45474	$1,52706 \cdot 10^{-1}$	$1,53067 \cdot 10^{-1}$
15	163,2	-0,45762	-0,45717	$1,52019 \cdot 10^{-1}$	$1,52183 \cdot 10^{-1}$
20	217,7	-0,45829	-0,45803	$1,51779 \cdot 10^{-1}$	$1,51872 \cdot 10^{-1}$
30	326,5	-0,45876	-0,45865	$1,51606 \cdot 10^{-1}$	$1,51648 \cdot 10^{-1}$
40	453,3	-0,45893	-0,45886	$1,51546 \cdot 10^{-1}$	$1,51569 \cdot 10^{-1}$
50	544,1	-0,45900	-0,45896	$1,51518 \cdot 10^{-1}$	$1,51533 \cdot 10^{-1}$
100	1088,3	-0,45910	-0,45911	$1,51480 \cdot 10^{-1}$	$1,51484 \cdot 10^{-1}$
10000	—	-0,45914	-0,45914	$1,51468 \cdot 10^{-1}$	$1,51468 \cdot 10^{-1}$

6 VARIATION EN FONCTION DU SURBAISSEMENT

Le surbaissement de l'arc est défini par l'angle d'ouverture ou son équivalent le rapport (f/L), rapport entre la flèche à la clef de l'arc sur la longueur de la corde ou longueur de travée.

On reprendra l'étude des différents déplacements et efforts déjà utilisés auparavant pour un

angle d'ouverture de 180° successivement pour 120° et 90°.

Les résultats sont rapportés avec les mêmes notations déjà utilisées.

La figure 7 représente le déplacement normalisé sous hypothèse de Bernoulli pour les deux angles d'ouverture (180° et 120°).

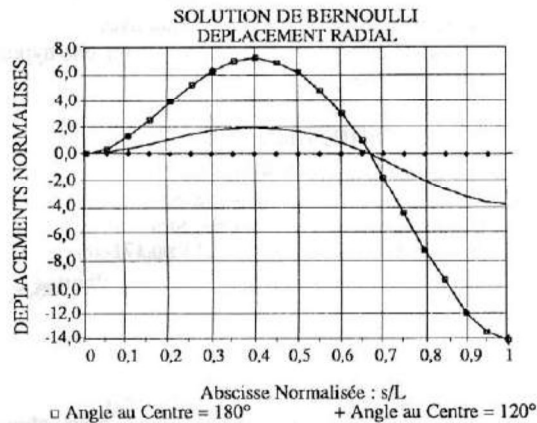


Figure 7 : Déplacements normalisés pour angle d'ouverture de 180° et 120°

Les tableaux 14 et 15 donnent les facteurs de correction $\psi(i, j)$ pour un angle d'ouverture de 120° et de 90°.

Tableau 14 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à la clef d'un arc pour angle d'ouverture de 120°

R/h	L/r	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$	$\psi(M, T)$	$\psi(T, M)$
10	20,9	+43,8	-30,5	-33,6	+50,7
15	31,4	+44,4	-37,1	-41,9	+51,4
20	41,9	+44,6	-40,1	-45,8	+51,7
30	62,8	+44,8	-42,7	-50,3	+52,0
40	83,8	+44,8	-44,1	-50,2	+52,0
50	104,7	+44,8	-44,7	-51,8	+52,0
100	209,4	+44,8	-44,8	-52,0	+52,0
150	314,2	+44,8	-44,8	-52,0	+52,0
10000	--	+44,8	-44,8	-52,0	+52,0

Tableau 15 : Facteurs de correction $\psi(i, j)$ à la clef d'un arc pour angle d'ouverture de 90°

R/h	L/r	$\psi(N, M)$	$\psi(M, N)$
10	20,9	+132,9	-57,1
15	31,4	+139,1	-85,9
20	41,9	+141,4	-104,4
30	62,8	+143,1	-125,4
40	83,8	+143,3	-191,8
50	104,7	+143,3	-136,1
100	209,4	+143,3	-144,4
150	314,2	+143,3	-143,3
200	342,2	+143,3	-143,3
250	--	+143,3	-143,3
10000	--	+143,3	-143,3

On notera que les facteurs de correction $\psi(N, M)$ et $\psi(T, M)$ se stabilisent plus rapidement que $\psi(M, N)$ et $\psi(M, T)$.

Par ailleurs, comme dans le cas précédent on retrouve pour R/h suffisamment grand :

$$\psi(M, N) = -\psi(N, M) \quad \text{et} \quad \psi(T, M) = \psi(M, T)$$

Les facteurs de correction $\psi(N, M)$ et $\psi(T, M)$ se stabilisent pratiquement pour R/h = 30 ou l'équivalent en élanement L/r = 50.

Lorsqu'on compare cette condition à celle obtenue dans le cas d'un arc sous-tendant un angle de 180°, on s'aperçoit qu'elle est identique quand on prend l'élanement L/r.

Enfin le tableau 15 donne les facteurs considérés dans le cas d'un arc bi-encasté sous-tendant un angle de 90° avec une charge ponctuelle à la clef.

Comme dans les cas traités auparavant on remarquera que les facteurs de correction $\psi(N, M)$ et $\psi(T, M)$ se stabilisent plus rapidement que $\psi(M, N)$ et $\psi(M, T)$.

On remarquera également que les conditions établies sur R/h en fonction du degré de surbaissment de l'arc sont équivalentes à la condition établie sur l'élanement ; cette dernière n'étant pas fonction du degré de surbaissment de l'arc.

Une comparaison entre les valeurs des facteurs de correction $\psi(N, M)$ pour différents surbaissements est donnée par le tableau 16.

Tableau 16 : Comparaison des facteurs de correction $\psi(N, M)$

ξ	Angle sous-tendu 180°	Angle sous-tendu 120°	Angle sous-tendu 90°
0,2	-3,40	-19,7	-64,9
0,4	-6,15	-34,6	-113,4
0,6	-26,45	-144,2	-467,7
0,8	+14,25	+79,9	+298,4
1,0	+8,45	+44,8	+144,3

Les calculs ont été menés également pour établir les relations liant les efforts sous les différentes hypothèses envisagées.

Les résultats se résument comme suit :

$$2\alpha = 180^\circ \quad \gamma_c^N = \gamma_c^M [1 - 0,74 (h/R)^2] \quad R/h > 10$$

$$2\alpha = 120^\circ \quad \gamma_c^N = \gamma_c^M [1 - 3,39 (h/R)^2] \quad R/h > 15$$

$$2\alpha = 90^\circ \quad \gamma_c^N = \gamma_c^M [1 - 3,39 (h/R)^2] \quad R/h > 20$$

$$2\alpha = 180^\circ \quad \beta_c^N = \beta_c^M [1 + 0,82 (h/R)^2] \quad R/h > 10$$

$$2\alpha = 120^\circ \quad \beta_c^N = \beta_c^M [1 + 5,34 (h/R)^2] \quad R/h > 15$$

$$2\alpha = 90^\circ \quad \beta_c^N = \beta_c^M [1 + 15,49 (h/R)^2] \quad R/h > 20$$

On remarquera, comme cela a été déjà fait pour les déplacements, que les conditions sur le rapport R/h en fonction du surbaissément représentent en fait la même condition sur l'éclatement : $L/r > 50$, et ce, quel que soit l'angle d'ouverture de l'arc.

7 CHARGE UNIFORME HORIZONTALE

Les relations établies pour le cas d'une charge ponctuelle à la clef sont également valables pour une charge uniforme. Tous les calculs effectués précédemment ont été refaits pour ce cas de charge. On remarquera que dans ce dernier cas les déplacements et efforts normalisés sont donnés par :

$$\Delta = Elw/(qR^4) \quad , \quad \beta = M/qR^2 \quad \text{et} \quad \gamma = N/qR$$

où q est la charge uniforme appliquée.

Tableau 17 : Facteurs de correction ψ (N,M) pour le cas d'une charge uniforme

ξ	Angle sous-tendu 18	Angle sous-tendu 120°
0,1	-4,3	45,8
0,2	-5,8	-61,0
0,3	-7,9	-86,6
0,4	-12,6	-137,7
0,5	-24,1	-252,0
0,6	-113,6	****
0,7	+60,6	+601
0,8	+25,8	+279
0,9	+21,9	+226
1,0	+20,3	+208

On obtient également les relations suivantes pour les efforts à la clef :

$$2\alpha = 180^\circ \quad \beta_c^N = \beta_c^M [1 + 3,10 (h/R)^2]$$

$$2\alpha = 120^\circ \quad \beta_c^N = \beta_c^M [1 + 39,9 (h/R)^2]$$

7 CONCLUSION

Les calculs effectués et rapportés ci-dessus montrent bien que des relations existent et permettent de passer d'une solution avec hypothèse simplifiée (hypothèse de Bernoulli qui ne prend en compte dans l'énergie de flexion que l'effet de flexion) à une hypothèse plus riche, soit celle de Kirchhoff (prise en compte de M et N dans l'énergie de déformation), soit celle de Timoshenko (prise en compte de M , N et T dans l'énergie de déformation). Ces relations existent pour la solution en déplacement et la solution en effort.

Pour un même point de calcul elles sont de type :

$$S^j = S^i [1 + \psi(i, j) (h/R)^2]$$

S^j : solution sous hypothèse ($j = M, N, T$)

S^i : solution sous hypothèse ($i = M, N, T$)

$\psi(i, j)$: facteur de correction

On peut donc établir des abaques donnant ces différents facteurs de correction pour les différentes hypothèses. Elles peuvent être construites pour une solution de déplacements ou d'efforts normalisés tels que présentés par cet article. La présentation sous forme de déplacements ou d'efforts normalisés permet évidemment une plus grande généralisation d'utilisation des abaques.

La généralisation de la procédure et du formalisme développé permet, pour un cas pratique avec des données numériques, de décider s'il y a lieu de retenir une hypothèse simplificatrice ou non $\odot$

8 BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.G Ashwell & A.B Sabir - "A New Cylindrical Finite Element Based on Simple Strain Function " Int. Jour. Mechanical Science vol.13 pp.171-180 ; 1971.
- [2] K.J.Bathe & E.L.Wilson - "Numerical Methods in Finite Element Analysis Prentice Hall". ; 1976.
- [3] S.F.Borg & J.J.Gennaro - "Modern Structural Analysis" éd. Van Nostrand Reinhol 1969.
- [4] J. Courbon - "Résistance des matériaux" . Tome 1 & 2 ; éd. DUNOND 1965.
- [5] D.J Dawe - "Curved Finited Element for Analysis of shallow and deep Arches" Computers & Structures Int. Jour.. vol.18 pp.559-580 ; 1974.
- [6] A. Darkov & V.Kouznetsov - "Mécaniques des Constructions" ; éd. MIR 1968.
- [7] W. Flügge - "Statique et dynamique des coques " ; éd. Eyrolles 1960.
- [8] H. Martin - "Introduction to MatrixMethods of Structural Analysis" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [9] Petyt & Fleisher - "Free Vibration of Curved Beam" Journal of Sound & Vibration vol.18 pp.17-30 1970.
- [10] G. Prathap - "The Curved Beam/Deep Arch/Finite Ring Element Reviste" Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.21 pp.389-407 1980.
- [11] A. Tessler & L.Spiridigliozzi - "Curved Beam Element with Penalty Relaxation" ; Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.23 pp.2245-2262 1986.
- [12] S.P.Timoshenko & Young - "Theory of Structures" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [13] S.P.Timoshenko & J.N Godier - "Theory of Elasticity" ; éd. Mc Graw Hill 1970.
- [14] Y.Yamamoto & H. Oshtsub - " A qualitative Accuracy Consideration on Arch elements" ; Int. Journ. Numerical Methods in Eng. vol.18 pp.1179-1193 1982.
- [15] I. Fried - "Shear in Co and C1 bending finite element" ; Int. Journ. of Solids and Structures, Vol. 9 pp 449-460 (1973).
- [16] S. Pawsey and W. Clough - "Improved numerical integration of thick shell finite element" ; Int. Journ. of Numerical Methods in Eng. Vol. 3 pp 575-586 (1971).